Sucesiones de números reales

Concepto de sucesión. Es más fácil reconocer una sucesión que definirla. Decimos, por ejemplo, que:

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad y_n = n \operatorname{sen}(1/n), \quad z_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$$

son sucesiones. Para cada $n \in \mathbb{N}$ los números reales x_n, y_n, z_n están correctamente definidos. Suele usarse la notación $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ para representar a las sucesiones.

Una sucesión no se identifica con los valores que toman sus elementos sino que debemos considerar el orden en que esos valores se toman.

Por ejemplo, los elementos de las sucesiones $\{(-1)^n\}$ y$\{(-1)^{n+1}\}$ toman los mismos valores 1 y -1 pero en la primera valen 1 en los lugares pares y -1 en los impares y al revés en la segunda: son sucesiones distintas.

Una sucesión de números reales es una aplicación del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en $\mathbb{R}$.

Por tanto, el símbolo $\{x_n\}$ indica una aplicación, la que a cada $n \in \mathbb{N}$ hace corresponder el número $x_n \in \mathbb{R}$.

Sucesiones convergentes. Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que **converge** a un número real x si, dado cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que m_ε se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : n \geqslant m_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon}$$

Se dice también que el número x es **límite de la sucesión** $\{x_n\}$, y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} = x$ o, simplemente, $\lim\{x_n\} = x$ e incluso, si no hay posibilidad de confusión, $\{x_n\} \to x$.

Teniendo en cuenta que la desigualdad $|x_n - x| < \varepsilon$ equivale a la doble desigualdad $x - \varepsilon < x_n < x + \varepsilon$ o, lo que es igual, $x_n \in]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, la definición anterior lo que dice es que $\{x_n\}$ converge a x cuando, dado cualquier intervalo abierto $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[$, se verifica que *todos los términos de la sucesión a partir de uno en adelante* están en dicho intervalo.

Una sucesión convergente tiene un único límite.

Ejemplos

La sucesión $\{1/n\}$ es convergente a cero.

Dado un número real $a \in]-1, 1[$, se verifica que la sucesión de las potencias de a, $\{a^n\}$, converge a cero.

Dado $x \in]-1, 1[$, se verifica que la sucesión $\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$, llamada ***serie geométrica de razón*** *x, converge a $\dfrac{1}{1-x}$.*

Para todo $k \in \mathbb{N}$ y para todo $a \in]-1, 1[$ se verifica que la sucesión $\{n^k a^n\}$ converge a cero

Sucesiones convergentes y estructura de orden de $\mathbb{R}$.

Conservación del orden. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$, $\lim\{y_n\} = y$ y que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ se tiene que $x_n \leqslant y_n$. Entonces se verifica que $x \leqslant y$.

Principio de las sucesiones encajadas. Supongamos que $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ son sucesiones tales que $\lim\{x_n\} = \lim\{z_n\} = \alpha$ y existe un número natural m_0 tal que para todo $n \geqslant m_0$ se verifica que

$$x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$$

entonces se verifica que $\lim\{y_n\} = \alpha$.

Una consecuencia inmediata de este resultado es que si cambiamos arbitrariamente un número finito de términos de una sucesión, la nueva sucesión así obtenida es convergente si lo era la de partida y con su mismo límite.

Definiciones. Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

Mayorada o acotada superiormente si su conjunto imagen está mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Minorada o acotada inferiormente si su conjunto imagen está minorado, es decir, si hay un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Acotada si su conjunto imagen está mayorado y minorado, equivalentemente, si hay un número $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|x_n| \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Creciente si $x_n \leqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estrictamente creciente si $x_n < x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Decreciente si $x_n \geqslant x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Estrictamente decreciente si $x_n > x_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Monótona si es creciente o decreciente.

Estrictamente monótona si es estrictamente creciente o decreciente.

Toda sucesión convergente está acotada.

Convergencia de las sucesiones monótonas. Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más concretamente, si una sucesión $\{x_n\}$ es:

i) Creciente y mayorada, entonces $\lim\{x_n\} = \beta$, donde $\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

ii) Decreciente y minorada, entonces $\lim\{x_n\} = \alpha$, donde $\alpha = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Sucesiones convergentes y estructura algebraica de $\mathbb{R}$. Dadas dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, se define su **suma** como la sucesión $\{x_n + y_n\}$ y su **producto** como la sucesión $\{x_n y_n\}$.

El producto de una sucesión convergente a cero por una sucesión acotada es una sucesión convergente a cero.

Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ y $\lim\{y_n\} = y$. Entonces se verifica que:

$$\lim\{x_n + y_n\} = x + y, \quad \lim\{x_n y_n\} = xy .$$

Si además suponemos que $y \neq 0$, entonces $\lim\{x_n/y_n\} = x/y$.

Sucesiones divergentes. Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

Positivamente divergente, y escribimos $\{x_n\} \to +\infty$, si para todo número real $K > 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \geqslant K$.

Negativamente divergente, y escribimos $\{x_n\} \to -\infty$, si para todo número real $K < 0$ existe un número natural $m_K \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geqslant m_K$ se verifica que $x_n \leqslant K$.

Diremos que una sucesión es **divergente** para indicar que es positivamente o negativamente divergente.

“Divergente” no es lo mismo que “No convergente”.

Propiedades de las sucesiones divergentes.

$\{|x_n|\} \to +\infty$ si, y sólo si, $\{1/x_n\} \to 0$.

La suma de una sucesión positivamente divergente con una sucesión acotada es una sucesión positivamente divergente.

La suma de una sucesión positivamente divergente con una sucesión minorada es otra sucesión positivamente divergente. En particular, la suma de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

El producto de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

El producto de una sucesión positivamente divergente por una sucesión que converge a un número positivo es otra sucesión positivamente divergente.

Indeterminaciones.

$$\begin{array}{lll}
x_n = 2n, & y_n = -n; & \{x_n + y_n\} = \{n\} \to +\infty \\
x_n = n, & y_n = -2n; & \{x_n + y_n\} = \{-n\} \to -\infty \\
x_n = n + 1, & y_n = -n; & \{x_n + y_n\} = \{1\} \to 1 \\
x_n = (-1)^n + n, & y_n = (-1)^n - n; & \{x_n + y_n\} = \{2(-1)^n\}
\end{array}$$

En consecuencia, las sucesiones del tipo $\{x_n + y_n\}$ donde $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to -\infty$, *requieren un estudio particular en cada caso*. Tales sucesiones suele decirse que son **una indeterminación del tipo** “$\infty - \infty$”.

Análogamente, si sabemos que $\{x_n\} \to 0$ y que $\{y_n\}$ es divergente, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la sucesión $\{x_n y_n\}$; la cual se dice que es **una indeterminación del tipo** “$0\,\infty$”. Las indeterminaciones que aparecen al estudiar el cociente de dos sucesiones divergentes o de dos sucesiones que convergen a cero, las llamadas **indeterminaciones de los tipos** “∞/∞”, “$0/0$”, pueden reducirse a una indeterminación del tipo “$0\,\infty$”.

Criterio de Stolz. Sea $\{y_n\}$ una sucesión positivamente divergente y estrictamente creciente y sea $\{x_n\}$ cualquier sucesión. Supongamos que

$$\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right\} \to L$$

donde $L\in\mathbb{R}$, o $L=+\infty$, o $L=-\infty$. Entonces se verifica también que $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\} \to L$.

Criterio de la media aritmética. Supongamos que $\{a_n\} \to L$ donde L es un número real, o $L=+\infty$, o $L=-\infty$. Entonces se verifica que

$$\left\{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right\} \to L.$$

Criterio de la media geométrica. Supongamos que $\{a_n\} \to L$ donde $\{a_n\}$ es una sucesión de números positivos y L es un número real o bien $L=+\infty$. Entonces se verifica que

$$\left\{\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}\right\} \to L.$$

Supongamos que $\left\{\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right\} \to L$ donde $\{x_n\}$ es una sucesión de números positivos y L es un número real o bien $L=+\infty$. Entonces se verifica que $\{\sqrt[n]{x_n}\} \to L$.

Sucesiones y límite funcional. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sean $a, L \in \mathbb{R}\cup\{+\infty,-\infty\}$. Equivalen las afirmaciones:

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

b) Para ***toda*** sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A con $x_n \neq a$ tal que $\{x_n\} \to a$ se verifica que $\{f(x_n)\} \to L$.

Una consecuencia inmediata de este resultado es que todo límite funcional que conozcas te va a permitir resolver *muchos* límites de sucesiones. En particular, de la lista de límites básicos que debes conocer se deducen los siguientes resultados.

Límites que debes saber de memoria. Para toda sucesión $\{x_n\} \to 0$, $x_n \neq 0$, se verifica que:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n}=1 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arc\,sen} x_n}{x_n}=1 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos x_n}{x_n^2}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg} x_n}{x_n}=1 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} x_n}{x_n}=1 \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{x_n}-1}{x_n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n-\operatorname{sen} x_n}{(x_n)^3}=\frac{1}{6} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{(1+x_n)^\alpha-1}{x_n}=\alpha \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)}{x_n}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg} x_n-x_n}{(x_n)^3}=\frac{1}{3} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+x_n)-x_n}{x_n^2}=\frac{-1}{2} \qquad \lim_{n\to\infty}(1+x_n)^{\frac{1}{x_n}}=\mathrm{e}$$

Estrategia. *Una estrategia para calcular límites de sucesiones consiste en convertir el límite de la sucesión que tienes que calcular en un caso particular de un límite funcional.* El porqué de esta estrategia es que para calcular límites de funciones disponemos de muchas más herramientas que las que tenemos para trabajar directamente con sucesiones.

Según esta estrategia, para calcular el límite de una sucesión $\{y_n\}$ lo que hay que hacer es relacionar dicho límite con un límite funcional. Debemos inventarnos una función, f, y una sucesión convergente, $\{x_n\} \to a$, de forma que se tenga $y_n = f(x_n)$. Entonces, podemos asegurar que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \alpha$, también es $\lim\{y_n\} = \alpha$.

El número e. La sucesión

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es estrictamente creciente y la sucesión

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

es estrictamente decreciente. Ambas sucesiones son convergentes y su límite es el número e.

Continuidad y sucesiones. Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función y sea $a \in A$. Equivalen las afirmaciones:

a) f es continua en a.

b) Para ***toda*** sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A tal que $\{x_n\} \to a$, se verifica que $\{f(x_n)\} \to f(a)$.

Podemos expresar este resultado como sigue: *la continuidad permuta con el límite secuencial*, esto es, si f es continua entonces:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big)$$

Sucesiones de exponenciales y logaritmos.

- $\{x_n\} \to x \iff \{\mathrm{e}^{x_n}\} \to \mathrm{e}^x$.
- $\{x_n\} \to +\infty \iff \{\mathrm{e}^{x_n}\} \to +\infty$.
- $\{x_n\} \to -\infty \iff \{\mathrm{e}^{x_n}\} \to 0$.

Para toda sucesión de números positivos $\{x_n\}$ se verifica que:

- $\{x_n\} \to x > 0 \iff \{\ln(x_n)\} \to \ln x$.
- $\{x_n\} \to +\infty \iff \{\ln(x_n)\} \to +\infty$.
- $\{x_n\} \to 0 \iff \{\ln(x_n)\} \to -\infty$.

Sucesiones asintóticamente equivalentes. Diremos que $\{x_n\}$ es **asintóticamente equivalente** a $\{y_n\}$, y escribiremos simbólicamente $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si $\{x_n/y_n\} \to 1$.

Sean $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ sucesiones asintóticamente equivalentes, $\{z_n\}$ una sucesión cualquiera y $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Se verifica que:

$$\{x_n z_n\} \to L \iff \{y_n z_n\} \to L$$

En particular:

$$\{x_n\} \to L \iff \{y_n\} \to L$$

Por tanto, para calcular el límite de un producto de sucesiones podemos reemplazar una cualquiera de ellas por otra asintóticamente equivalente.

Observación. Es importante observar que en una suma de sucesiones no se puede, en general, sustituir una sucesión por otra asintóticamente equivalente. Por ejemplo, si $x_n = n+1$, $y_n = n+1/n$ y $z_n = -n$, es claro que $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ pero $\{x_n + z_n\} = \{1\}_{n\in\mathbb{N}}$ no es asintóticamente equivalente a $\{y_n + z_n\} = \{1/n\}$.

Sucesiones de potencias. Son sucesiones de la forma $z_n = x_n^{y_n}$, donde se supone que $x_n > 0$. Para estudiarlas se toman logaritmos y se estudia la sucesión $w_n = \ln(z_n) = y_n \ln(x_n)$. La sucesión $\{z_n\}$ es una indeterminación cuando $\{y_n \ln(x_n)\}$ es una indeterminación del tipo “$0\,\infty$”, lo que ocurre cuando:

a) $\{x_n\} \to 1$, $\{|y_n|\} \to +\infty$ (indeterminación “1^∞”)

b) $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to 0$ (indeterminación “∞^0”)

c) $\{x_n\} \to 0$, $\{y_n\} \to 0$ (indeterminación “0^0”)

Criterio de equivalencia logarítmica. Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos distintos de 1 que converge a 1, $\{y_n\}$ una sucesión cualquiera y L un número real. Entonces se tiene que:

- $\text{lím}\{x_n^{y_n}\} = \mathrm{e}^L \iff \text{lím}\{y_n(x_n - 1)\} = L$.
- $\{x_n^{y_n}\} \to +\infty \iff \{y_n(x_n - 1)\} \to +\infty$.
- $\{x_n^{y_n}\} \to 0 \iff \{y_n(x_n - 1)\} \to -\infty$.

Este criterio permite resolver en muchos casos las indeterminaciones “1^∞” y “$0\,\infty$”.